***Абушкевич Алексей Александрович***

***учащийся 9 класса***

***ГУО «СШ №2 г. Сенно»***

***Луночки Гиппократа***

«Нет ничего нового под солнцем,

но есть кое-что старое, чего мы не знаем»

Лоренс Питер

 Одним из сложных и самых интересных учебных предметов в школе является геометрия.Почти каждая геометрическая задача нестандартна, поэтому и вызывает интерес. Особый интерес вызывают задачи, чертежи которых привлекают своей необычностью и изяществом. При изучении темы «Длина окружности и площадь круга» встречается такое понятие, как «луночки Гиппократа», которое вызывает удивление своей необычной формой и свойствами.

Изучением окружности занимались с древнейших времён и при изучении этой геометрической фигуры сегодня, встречаются некоторые интересные факты: доказательства теорем, решение задач, истоки которых выходят из периода до н.э. и пользуются особым успехом у современных математиков.

Гиппократовы луночки – фигуры (А и В, рисунок 1) ограниченные полуокружностями, построенными на катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах, и частями полуокружности, построенной на гипотенузе того же треугольника. Сумма площадей обеих луночек равна площади треугольника. Рассмотрение такого рода луночек восходит к древнегреческому математику Гиппократу Хиосскому (5 в. до н. э.).$\left[1\right]$.

Именно Гиппократу принадлежит первая известная попытка создать «Начала» геометрии. К сожалению, книга эта до нас не дошла. Гиппократ пытался осуществить квадратуру круга, иначе говоря, построить с помощью циркуля и линейки круг, равновеликий данному квадрату. И хотя это ему, естественно, не удалось, он сумел построить несколько фигур, представляющих собой куски полуплоскости, ограниченными дугами окружностей, и, тем не менее, равновеликих квадрату.

На рисунке 2 четыре такие луночки окрашены в жёлтый цвет. Гиппократ заметил, что суммарная их площадь равна площади квадрата окрашенного здесь в голубой цвет. Действительно, что сумма площадей полукругов построенных на сторонах этого квадрата, равна площади круга, в который вписан квадрат. Если из полукругов удалить окрашенные в фиолетовый цвет сегменты, то останутся четыре луночки; если же удалить их из большего круга, то останется квадрат.

Рисунок 3 иллюстрирует ещё одну теорему Гиппократа. Оказывается, площадь трапеции, вписанной в окружность с центром в точке О, равна сумме площадей оранжевых луночек и оранжевого полукруга (все три луночки равны по построению, полукруг равен тем полуокружностям, из которых образованы луночки). Доказывается эта теорема так же как предыдущее утверждение.

 На рисунке 4 изображена фигура, об особенностях которой Гиппократ, по-видимому, не знал. А между тем площадь изображённого здесь прямоугольного треугольника равна сумме площадей луночек. Доказательство этого факта легко получить, если воспользоваться теоремой Пифагора. Кстати, у этой фигуры есть ещё одно удивительное свойство. Луночки имеют одинаковую ширину. Точнее говоря, диаметры наибольших вписанных в них окружностей равны каждой половине разности между суммой катетов и гипотенузой треугольника, показанного на том же рисунке.$\left[2\right]$.

Рассмотрим решение некоторых задач.

Задача 1. Построим на сторонах прямоугольного треугольника, как на диаметрах, полуокружности. Докажите, что сумма площадей двух закрашенных луночек равна площади прямоугольного треугольника.

Доказательство.

Пусть сумма площадей луночек равна S. Тогда $S=\frac{πa^{2}}{2∙4}+\frac{πb^{2}}{2∙4}+\frac{ab}{2}-\frac{πc^{2}}{2∙4}=\frac{π}{8}\left(a^{2}+b^{2}-c^{2}\right)+\frac{ab}{2}=\frac{ab}{2}$, так как по теореме Пифагора $a^{2}+b^{2}=c^{2}$. Что и требовалось доказать.$\left[3\right]$.

Задача 2.

Точки О, О1 и О2 - центры полукругов, изображённых на рисунке, $АВ⊥О\_{1}О\_{2}$, АВ=8 см. Найдите площадь закрашенной части.

Решение.

Площадь закрашенной части равна разности полукруга с центром в точке О и двух полукругов с центрами в точках О1 и О2. Треугольник DAE – прямоугольный, так как вписанный угол DAE опирается на диаметр DE окружности с центром в точке О. так как $АВ⊥DE$, то АВ высота треугольника DAE, опущенная на гипотенузу DE. Пусть DВ=х, ВЕ=у, DE=х+у. Тогда площадь закрашенной фигуры

$S=\frac{1}{2}π\left(\frac{DE}{2}\right)^{2}-\frac{1}{2}π\left(\frac{DB}{2}\right)^{2}-\frac{1}{2}π\left(\frac{BE}{2}\right)^{2}=\frac{1}{8}π\left(\left(x+y\right)^{2}-x^{2}-y^{2}\right)=\frac{1}{4}πxy$. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т.е. $АВ^{2}=DB∙BE$. Отсюда $DB∙BE$=ху=$8^{2}$=64. $S=\frac{1}{4}π∙64=16π\left(см^{2}\right)$.

Задача 3.

Точки О, О1 и О2 - центры полукругов, изображённых на рисунке, $АВ$=6 см, ВС=8 см. Найдите сумму площадей луночек Гиппократа $S\_{1}+S\_{2}$.

Решение.

Треугольник АВС – прямоугольный, так как вписанный угол АВС опирается на диаметр АС. Тогда по теореме Пифагора $АС=\sqrt{АВ^{2}+ВС^{2}}$=10 см. Если сложить площади полукругов с диаметрами АВ и ВС с площадью треугольника АВС и вычесть из этой суммы площадь полукруга с диаметром АС, то получим искомую площадь $S\_{1}+S\_{2}$.

Площадь полукруга с диаметром АВ

$S\_{полукр.АВ}=\frac{1}{2}π∙О\_{1}А^{2}=\frac{1}{2}π∙3^{2}=\frac{9π}{2}\left(см^{2}\right)$.

Площадь полукруга с диаметром ВС

$S\_{полукр.ВС}=\frac{1}{2}π∙О\_{2}В^{2}=\frac{1}{2}π∙4^{2}=8π\left(см^{2}\right)$.

Площадь полукруга с диаметром АС

$S\_{полукр.АС}=\frac{1}{2}π∙ОА^{2}=\frac{1}{2}π∙5^{2}=\frac{25π}{2}\left(см^{2}\right)$.

Площадь треугольника АВС

$S\_{ABC}=\frac{АВ∙ВС}{2}=\frac{6∙8}{2}=24\left(см^{2}\right)$.

$S\_{1}+S\_{2}=\frac{9π}{2}+8π+24-\frac{25π}{2}=24\left(см^{2}\right)$.$\left[4\right]$.

Задача 4.

На сторонах прямоугольного треугольника АВС как на диаметрах построены полукруги, изображённые на рисунке. Докажите, что $S\_{1}+S\_{2}=S\_{3}$.

Доказательство.

Площадь каждого полукруга равна:

$S\_{1}=\frac{πR\_{1}^{2}}{2}$; $S\_{2}=\frac{πR\_{2}^{2}}{2}$; $S\_{3}=\frac{πR\_{3}^{2}}{2}$, где

$2R\_{1}=a, R\_{1}=\frac{a}{2}$;

$2R\_{2}=b, R\_{2}=\frac{b}{2}$;

$2R\_{3}=c, R\_{3}=\frac{c}{2}$. Тогда $S\_{1}+S\_{2}=S\_{3}$,

$\frac{π}{2}\left(\frac{a^{2}}{4}+\frac{b^{2}}{4}\right)=\frac{π}{2}∙\frac{c^{2}}{4}$, $\frac{π}{8}\left(a^{2}+b^{2}\right)=\frac{π}{8}c^{2}$, где$a^{2}+b^{2}=c^{2}$. Что и требовалось доказать.$\left[5\right]$.

Итак, при изучении геометрической фигуры – окружности, сегодня встречаются некоторые интересные факты: доказательства теорем, решение задач, истоки которых выходят из периода до н.э., которые не изучаются на уроках математики, но встречаются в задачах. Тем, кто заинтересовался историей вопроса о луночках Гиппократа, рекомендую воспользоваться «Интерактивным плакатом Луночки Гиппократа». Для этого необходимо перейти по ссылке <https://clck.ru/MLyy3> или воспользоваться [QR-код](http://ru.wikipedia.org/wiki/QR-%D0%BA%D0%BE%D0%B4)ом .

Данный материал является дополнением к изученным свойствам окружности и способствует повышению уровня логической культуры и опыта решения планиметрических задач, подготовки к успешному участию в математических конкурсах и олимпиадах, выпускному экзамену по учебному предмету «Математика».

**Список литературы**

1. Энциклопедический словарь,Министерство культуры СССР, Главное управление полиграфической промышленности, типография «Печатный двор им. А.М.Горького, Ленинград, 1953.

2. Журнал «Квант» №5, 1971 г.

3. Математика. Подготовка к олимпиадам: 6-9 классы/Т.П.Бахтина. – Минск: Аверсев, 2015. – 221с.: ил.

4. Сборник заданий для выпускного экзамена по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на II ступени общего среднего образования/ сост. В.В.Беняш-Кривец $\left[и др.\right]$; под ред. В.В.Беняш – Кривца. – Минск: НИО: Аверсев, 2016. – 189 с.: ил.

5. Геометрия: учебное пособие для 9-го класса учреждения образования с русским языком обучения / В.В.Казаков. – Минск: Народная асвета, 2019. – 191 с.: ил.