**11 класс**

1. Докажите, что:

2

*(5 баллов)*

1. Числа а, в, с образуют арифметическую прогрессию, числа а2, в2, с2 образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

*(6 баллов)*

1. Решите уравнение (х + 3)4+ (х + 5)4 = 16

*(3 балла)*

1. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба равно d. Определите полную поверхность куба.

*(6 баллов)*

1. Маша, Лида, Женя и Катя умеют играть на разных инструментах (виолончели, рояле, гитаре, скрипке), но каждая только на одном. Они владеют иностранными языками (английским, французским, немецким, испанским), но каждая только одним. Девушка, которая играет на гитаре; говорит по-испански, Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка. Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка. Девушка, которая говорит по-немецки, не играет ни виолончели. Женя знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

*(5* *баллов)*

**11 класс**

1. Определите все значения параметра *а*, при которых система, состоящая из двух уравнений *х2 + у + 5 = 4х; ху + 2у2 = 0* имеет только одно решение, удовлетворяющее условию*: х2 + у2 ≤а2*

*(4 балла)*

2. Если в правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен *β*, а двугранный угол при боковом ребре равен α, *то 2cos* α *+3cos2 β* *=1* Докажите.

*(5 баллов)*

3. Из трех различных цифр X, Y, Z образованы всевозможные трехзначные числа. Сумма этих чисел в три раза больше трехзначного числа, каждая цифра которого есть X. Найдите цифры X, Y, Z.

*(4 балла)*

4. Через точку, взятую внутри треугольника, провели три разреза по прямым, параллельным сторонам треугольника. В результате треугольник распался на части, среди которых три треугольника.

Докажите, что если S1, S2, S3- площади этих треугольников, a S - площадь самого исходного треугольника, то 

*(6 баллов)*

5. Шахматный король, начав с некоторого поля шахматной доски, обошел все остальные ее поля, побывав на каждом из них ровно по одному разу. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась ломаная без самопересечений. Какую наибольшую длину она может иметь, если сторона клетки шахматной доски равна 1? (Король ходит по обычным правилам). *(6 баллов)*

**11 класс**

1. На площади установлено 5 громкоговорителей, разбитых на две группы: в одной 2, в другой 3 аппарата. Расстояние между группами 50 м. Где надо стать, чтобы звуки обеих групп доносились с одинаковой силой?

1. Докажите тождество *= п2*, где n∈N, *l(k)~* наибольший нечетный делитель числа *k*.
2. Куб с ребром 1 срезан плоскостями "по углам" так, что от каждой грани остался правильный многоугольник (с вершинами на ребрах куба). Найдите объем полученного тела.
3. На координатной плоскости хОу в окрестности точки О дана кривая у = sinx (см.рис). Масштаб не указан. При помощи циркуля и линейки построить точку (0; 1).

*5*. Найти сумму 6 + 66 + 666 + ... + 666 ... 6,

n

**11 класс**

1. Пусть *а2-в* = *в2* - *с* = *с2* - *а,* причем *а≠в, в≠с, с≠а.*

Найдите значение выражения

*(а + в + 1) (в* + *с + 1) (с* + *а + 1)*

2*.* Длина наибольшей стороны треугольника равна 1. Докажите, что три круга с центрами в вершинах и радиусами - покрывают весь треугольник.

3. Дана функция f(x) = │4 — 4│ х ││-2.

Сколько решений имеет уравнение f(f(x)) = x?

4. Площадь трапеции равна АВСД основаниями АД и ВС (АД – большое основание) равна 48, а площадь треугольника АОВ, где О – точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найдите отношение основания трапеции АД:ВС.

5. На острове Невезения отменили понедельники. Известно, что в прошлом году ровно 8 четвергов там пришлось на наши четверги. Сколько таких четвергов будет в будущем году?

**11 класс**

1. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее такими свойствами: его половина есть квадрат целого числа, его третья часть — куб целого числа, его пятая часть *—* пятая степень целого числа.

*(3 балла)*

2. Внутри квадрата АВСД построен равносторонний треугольник АВК. Прямые ВК и АД пересекаются в точке Р. Докажите, что отрезок, соединяющий середины отрезков КД и СР, равен половине стороны квадрата.

*(4 балла)*

3. Вычислите М =

*(6 баллов)*

4. Положительные числа *а, в, с* таковы, что *а2* + *в2 -ав* = *с2* .

Докажите, что *(а-с)(в-с)≤ 0*

*(8 баллов)*

5. Дана замкнутая пространственная ломаная А1А2А3…Аn . Некоторая плоскость пересекает все ее звенья: А 1А 2 в точке *В1, А2А3* в точке в точке В2,…AnA1 в точке Вn. Докажите, что:



*(9 баллов)*

**11 класс**

1. Пятеро разбойников добыли мешок золотого песка. Они хотят поделить его так, чтобы каждый был уверен, что он получил не меньше одной пятой золота. Никаких способов измерения у них нет, однако каждый умеет оценивать на глаз величину кучи песка. Мнения разбойников о величине куч могут расходиться. Как им поделить добычу?
2. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого – полный квадрат, одна треть – полный куб, одна пятая – полная пятая степень.

**3**. Найдите целое число, равное значению выражения

**4**. Все цифры некоторого четырехзначного числа, являющегося полным квадратом, можно уменьшить на одно и тоже число так, что получится четырехзначное число, которое тоже является полным квадратом. Найдите все такие числа

**11 класс**

1. Можно ли найти такую натуральную степень числа 3, которая оканчивается на …0001?
2. Имеются два сосуда емкостью 1 л каждый, один из них наполнен кофе, другой – пустой. Кофе последовательно переливают из первого сосуда во второй, из второго – в первый, из первого – во второй и т.д., причем доля отливаемого кофе составляет , , и т.д. от количества кофе в сосуде, из которого он отливается. Сколько кофе будет в каждом из сосудов после 125 переливаний?
3. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 100 раз. Что получится в результате? Обоснуйте ответ.
4. Один мастер делает на длинной ленте пометки синим карандашом от ее начала через каждые 36 см. Другой мастер делает пометки красным карандашом от начала через каждые 25 см. Может ли синяя пометка оказаться на расстоянии 1 см от какой-нибудь красной?

**11 класс**

**1.** Функция Ф определена для всех действительных чисел и при всех *х* и *у* удовлетворяет равенству Ф(*х* ***·*** *у*) = Ф(*х*) + Ф(*у*). Чему тогда равно Ф(2000)?

**2.** Можно ли число 203 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже было равно 203?

**3.** Последовательность (*ап*) 1, , , , , … задается так:

*а1 =1* и  *ап + 1 =1 +1 : ап*  для каждого *п* = 1, 2, 3, … Найдите число, которое меньше всех членов последовательности с четными номерами (*а2, а4, а6, …*) и одновременно больше всех ее членов с нечетными номерами (*а1, а3, а5, …*).

**4.** Рассматриваются квадратные трехчлены вида *x2 + px + g*  с целыми коэффициентами, при этом *p + g =* 30. Сколько таких трехчленов имеют целые корни?

**5.** Из трех различных цифр составили три различных трехзначных числа, образующих арифметическую прогрессию (в каждом числе все цифры различные). Каково наибольшее значение разности такой прогрессии?